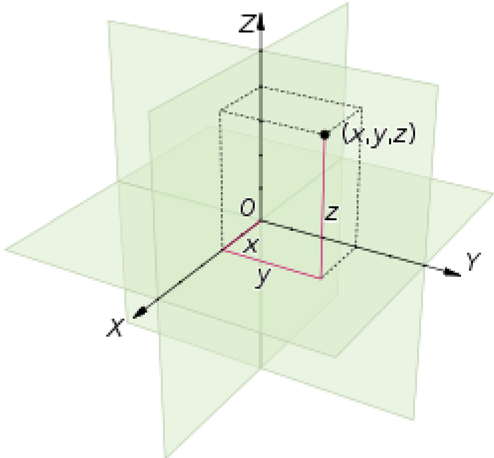
WIKIPEDIA

Espacio euclídeo

El **espacio euclidiano** es un tipo de espacio geométrico donde se satisfacen los axiomas de Euclides de la geometría. La recta real, el plano euclídeo y el espacio tridimensional de la geometría euclidiana son casos especiales de espacios euclidianos de dimensiones 1, 2 y 3 respectivamente. El concepto abstracto de espacio euclídeo generaliza esas construcciones a más dimensiones. Un espacio euclídeo es un espacio vectorial completo dotado de un producto interno (lo cual lo convierte además en un espacio afín, un espacio métrico y una variedad riemanniana al mismo tiempo)....



Un punto en el espacio euclídeo tridimensional puede ser ubicado por medio de tres coordenadas.

El término **euclídeo** se utiliza para distinguir estos espacios de los espacios "curvos", de las geometrías no euclidianas y del espacio de la teoría de la relatividad de Einstein. Para resaltar el hecho de que un espacio euclídeo puede poseer *n* dimensiones, se suele hablar de "espacio euclídeo *n*-dimensional" (denotado $\mathbb{E}^n$, $\boldsymbol{E}^n$, o incluso $\mathbb{R}^n$).

Índice

Introducción

Un espacio euclídeo de dimensión finita es un espacio vectorial normado sobre los números reales de dimensión finita, en que la norma es la asociada al producto escalar ordinario. Para cada número entero no negativo *n*, el espacio euclídeo *n*-dimensional se representa por el símbolo $\mathbb{R}^n$ y es el conjunto de todas las tuplas ordenadas

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

en donde cada x_i es un número real, junto con la función distancia entre dos puntos (x_1, ..., x_n) e (y_1, ..., y_n) definida por la fórmula:

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

Esta función distancia es una generalización del teorema de Pitágoras y se denomina distancia euclidiana. El hecho de que se haya definido una distancia permite definir otros conceptos métricos como el de medida de Lebesgue, lo cual permite a su vez definir la longitud de una curva (1-volumen), las nociones de área (2-volumen), volumen (3-volumen) y cuando el espacio tiene dimensión superior a 3 n-volumen (para $n > 3$).

Además, pueden definirse ángulos, al poder hablar de proyectar una longitud recta sobre la dirección de otra longitud recta no paralela, así el ángulo entre dos rectas r_1 y r_2 cuyos vectores unitarios tangentes son $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ se puede definir como:

$$\theta = \arccos(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)$$

Estructuras sobre el espacio euclídeo

Los espacios euclidianos y sus propiedades han servido de base para generar gran cantidad de conceptos matemáticos relacionados con la geometría analítica, la topología, el álgebra y el cálculo. Aunque el espacio euclídeo suele ser introducido, por razones didácticas, como espacio vectorial, en realidad sobre él se pueden definir muchas más estructuras. El espacio euclídeo es además de un espacio vectorial un caso de:

- Un espacio de Hilbert de dimensión finita, con el producto escalar ordinario.
- Un espacio de Banach de dimensión finita, con norma inducida por el producto escalar interior.
- Un espacio métrico completo, con distancia inducida por la norma anterior.
- Un espacio topológico, inducido por la métrica euclídea.
- Una variedad de Riemann, con la métrica euclídea.

- Un espacio afín donde el espacio vectorial asociado es $\mathbb{R}^n$
- Un grupo de Lie, con la operación de adición.
- Un álgebra de Lie con el producto vectorial (solo en el caso tridimensional).

El espacio euclídeo como espacio métrico

Por definición, $\mathbb{E}^n$ es un espacio métrico, y es por tanto también un espacio topológico; es el ejemplo prototípico de una *n*-variedad, y es de hecho una *n*-variedad diferenciable. Para $n \neq 4$, cualquier *n*-variedad diferenciable que sea homeomorfa a $\mathbb{E}^n$ es también difeomorfa a ella. El hecho sorprendente es que esto no es cierto también para $n = 4$, lo que fue probado por Simon Donaldson en el año 1982; los contraejemplos se llaman 4-espacios exóticos (o falsos).

Dado que el espacio euclídeo $\mathbb{E}^n$ es en sí mismo una variedad diferenciable, en cada punto se puede definir su espacio tangente (que es un espacio vectorial de dimensión *n*), y puede aprovecharse la estructura euclídea para definir una métrica sobre el fibrado tangente del espacio euclídeo, lo cual le da la estructura de variedad de Riemann, eso permite definir áreas, volúmenes y *n*-volúmenes para subconjuntos diferenciables de dicho espacio.

El espacio euclídeo como espacio topológico

Se puede decir mucho sobre la topología de $\mathbb{E}^n$. Un resultado importante, la invariancia del dominio de Brouwer, es el de que cualquier subconjunto de $\mathbb{E}^n$ que sea homeomorfo a un subconjunto abierto de $\mathbb{E}^n$ es en sí mismo abierto. Como consecuencia inmediata de esto se tiene que $\mathbb{E}^m$ no es homeomorfo a $\mathbb{E}^n$ si $m \neq n$ —un resultado intuitivamente "obvio" que, sin embargo, no es fácil de demostrar—.

El espacio euclídeo como espacio vectorial

El *n*-espacio euclídeo se puede considerar también como un espacio vectorial *n*-dimensional real, de hecho, un espacio de Hilbert, de manera natural. El **producto escalar**, de **x** = (x_1,...,x_n) e y = (y_1,...,y_n) está dado por:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Espacio euclídeo de dimensión infinita

Los espacios euclídeos considerados usualmente tienen una dimensión topológica finita. Eso hace que sean localmente compactos. Sin embargo, es posible concebir estructuras de dimensión infinita que tengan propiedades análogas a los espacios euclídeos, por lo que la extensión a dimensión infinita de la noción de espacio euclídeo es posible con unas pocas precauciones.[1] En primer lugar, se puede considerar el conjunto $\mathbb{R}^\omega$ definido como:

$$\mathbb{R}^\omega = \{(x_1, x_2, \ldots) | \forall i : x_i \in \mathbb{R}\}$$

Es decir, este conjunto es el producto cartesiano de un número infinito numerable de copias de $\mathbb{R}$. Sin embargo, el conjunto de todas esas tuplas infinitas no tiene la estructura de espacio euclídeo porque no se puede dotar de una norma euclídea adecuada. Por ejemplo, las tuplas:

$$\mathbf{x} = (1, 1, 1, \ldots),\ \text{ó}\ \mathbf{y} = (1, 2, 3, 4, \ldots)$$

No representan vectores cuya suma de componentes al cuadrado sea un número real finito. Por esa razón se considera el subconjunto:

$$E_\infty = \{(x_1, x_2, \dots) | \forall i : x_i \in \mathbb{R},\ \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} |x_n|^2 < \infty\} \subsetneq \mathbb{R}^\omega$$

Este espacio vectorial E_∞ comparte la mayor parte de los espacios euclídeos finitodimensionales y por tanto puede considerarse un espacio euclídeo infinitodimensional. La principal propiedad es que el espacio euclídeo infinitodimensional a diferencia de sus versiones finitodimensionales no es un espacio localmente compacto.

Véase también

- Geometría euclidiana
- Geometría analítica
- Medida de Lebesgue

Referencias

1. Nowinski, J. L. (1981). *Infinite-Dimensional Euclidean Spaces. In Applications of Functional Analysis in Engineering* (http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4684-3926-7_6) (pp. 45-57). Springer US.

Bibliografía

- Kelley, John L. (1975). *General Topology*. Springer-Verlag. ISBN 0-387-90125-6.
- Munkres, James (1999). *Topology*. Prentice-Hall. ISBN 0-13-181629-2.